SOBRE ELS FONAMENTS DE LA FÍSICA-MATEMÀTICA D'EULER (*)

per

ALBERT DOU I MASDEXEXÀS
Professor de la Secció de Matemàtiques, Facultat de Ciències,
Universitat Autònoma de Barcelona

En primer lloc, vull agrair a la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques, i en particular a la Secció de Matemàtiques, que m'hagin ofert de participar en aquest cicle de Conferències en commemoració del segon centenari de la mort de LEONHARD EULER.

El tema dels fonaments en la tasca científica d'EULER és especialment interessant, perquè EULER (1707-1783) cobreix gairebé tot el segle XVIII, durant el qual tant el problema del rigor en la matemàtica, com l'aclariment dels conceptes primaris de la física resulten particularment intricats i estan contínuament a l'ordre del dia. En aquest segle els físics i els matemàtics són la mateixa gent; EULER, podríem dir, és físic per la necessitat que imposa el seu temps, malgrat que tingui moiltíssimes i importants contribucions a la matemàtica fonamental i que per caràcter i afició sigui un matemàtic nat.

El XVII és el segle de la matemàtica física, no sols pels problemes tractats i resolts, sinó molt més per raons metodològiques i epistemològiques. Per això té sentit tractar ensems els fonaments de la matemàtica i els de la física. M'ocuparé en una primera part de la fonamentació de la matemàtica, i després en una segona part

* Aquest text correspon aproximadament al de la conferència donada durant el Cicle que recull aquest volum. Entretant la part 1.2 fou reelaborada i ha estat publicada en castellà a la contestació de l'autor al discurs d'entrada a l'Acadèmia de Ciències de Madrid del professor Miguel de Guzmán (març de 1983).

breument d'alguns principis que fonamenten la física i de les relacions d'aquesta amb les matemàtiques.

1. La contribució d'EULER a les matemàtiques és immensa i de primeríssima qualitat; és, sens dubte, el matemàtic més important del segle XVIII. EULER, que no rebutja pas el tema dels fonaments de la matemàtica, conseqüentment es veu abocat manta vegada a tractar-lo. Si exceptuem la teoria de les paral·leles que portà al descobriment de les geometries no euclidianes i a la profundització dels fonaments de la geometria, de la qual EULER no s'ocupà, a penes trobarem cap altra qüestió o polèmica del segle XVIII que toqui els fonaments de la matemàtica i de la qual EULER no s'hagi ocupat. No podia ésser d'altra manera, si considerem que Euler escriví temàtiques: *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748), *Institutiones Calculi Differentialis,* (1755), *Institutiones Calculi Integralis* (1770), *Methodus Inveniendi Lineas Curvas* (1744), i *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770), a part de diverses monografies dedicades a qüestions particulars.

1.1. Ja en el segle XVII els matemàtics havien abandonat el mètode axiomàtic dels grecs i els fonaments consistien en un conjunt de principis, més o menys explícits, dels quals fluïen les demostracions i els teoremes. Naturalment, hom assumia tots els principis i teoremes dels *Elements* d'EUCLIDES; i també la validesa de la intuïció geomètrica, en particular de la continuïtat de la recta i de certes línies corbes. Em sembla que la manca de rigor, tan clara i característica de la matemàtica del segle XVIII, es deu a la imprecisió d'alguns conceptes, com el de nombre i el de funció. També a l'aplicació de mètodes deficients, per exemple en el càlcul amb infinitesimals i amb sèries. I també a principis epistemològics insuficients, ja que d'una banda hom no dubta de la possibilitat d'una veritat i certesa absoluta de les matemàtiques, mentre que d'altra banda aquestes veritat i certesa es fonamenten en la consistència de la realitat física, o sigui que en última instància deriven de la física; és a dir, que la indepèndencia de les matemàtiques respecte a la física no ha estat assolida encara, sinó que durant tot el XVIII està en gestació.

Només hem de llegir les primeres pagines del *Vollständige*

Anleitung zur Algebra (1770), per exemple la "demostració" que $(-1) \cdot (-1) = +1$, per veure ara quantes coses se li escaparen a EULER. Però, d'altra part, citem només l'aclariment de la funció logaritme prolongada als nombres negatius (Cf. EULER:*De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logaritmes négatifs et imaginaires* (1751) i l'obtenció de la formula

$$e^{\pi i} + = 0,$$

on endemés les tres lletres com a símbols dels tres nombres que signifiquen són introduïdes per EULER, per comprendre la importància de la contribució d'EULER en el camp de la Teoria de Funcions.

Quelcom de similar es pot dir del càlcul de sèries i d'infinitesimals. Així, EULER, pensant en la definició de derivada, escriu: Hom comprendrà millor la doctrina de l'infinit si exposem què és l'infinitament petit dels matemàtics. No hi ha dubte que qualsevol quantitat pot esvanir-se tant que desaparegui totalment i acabi no essent res. Però una quantitat infinitament petita no és altra cosa que una quantitat que s'esvaneix i per tant veritablement serà igual a zero. Ho confirma també aquella definició dels infinitament petits segons la qual són menors que qualsevol quantitat assignable; puix que si la quantitat fos tan petita que fos menor que qualsevol quantitat assignable, aleshores certament no podria ésser que no fos res; ja que si no fos igual a zero, se li podria assignar una quantitat que li fos igual, cosa que seria contra la hipòtesi. Al que pregunta, doncs, què és una quantitat infinitament petita en matemàtriques, responem que aquesta és realment igual a zero ["revera = 0"]; ni tampoc estan latents en aquesta idea tants misteris com els que vulgarment hom pensa... (EULER,*Institutiones Calculi Differentialis,* 1775, n. 83, pp 77-78). Segons els criteris de rigor dels grecs o dels actuals, les paraules citades, bé que representen un progrés respecte a les emprades el 1748 (*Introductio in Analysin Infinitorum,* cap. VII, n. 114, p. 85), o que constitueixen probablement la definició al·ludida, deixen força a desitjar: els "infinitament petits" no són nombres, sinó variables o altres entitats que EULER no explicita. Però, d'altra banda, EULER els maneja correctament, i àdhuc en el Prefaci de l'obra citada (1755) en dóna una explicació més satisfactòria en la qual empra la paraula "límit"; i encara més tard, el 1765, en dóna una nova definició molt correcta i introdueix unes notacions que han perdurat fins als nostres dies (Cf. *De usu functionum discontinuarum in Analysi, Opera Onmia* (1), 23, nn. 10 i 11, pp. 80-81).

1.2. Com a tema central i àdhuc quasi exclusiu d'aquesta conferència em proposo analitzar la contribució d'EULER al desenvolupament del concepte de funció. Després de les corbes algèbriques introduïdes per DESCARTES, sorgeixen les funcions elementals i el logaritme, l'exponencial, les funcions trigonomètriques, la catenària, etc. Llurs propietats són estudiades durant el segle XVII mitjançant llur desenvolupament en sèrie i gràcies al càlcul infinitesimal. NEWTON introdueix el terme "fluents", LEIBNIZ, el de "funció", i EULER és el primer que empra la notació y = F : x i més tard y = F (x).

En la cèlebre *Introductio in Analysin infinitorum* (1748) EULER encapçala el primer capítol del primer llibre amb el títol "*De functionibus in genere*". En el número 4 defineix: "4. Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, et numeris seu quantitatibus constantibus" (Una funció d'una quantitat variable és una expressió analítica composta de manera arbitrària d'aquella quantitat variable i de nombres o sigui de quantitats constants).

A continuació especifica que allò que diferencia unes funcions d'altres depèn de com es mesclen les operacions que componen l'expressió analítica. Aquestes operacions poden ésser algèbriques, com sumar i restar, multiplicar i dividir, l'elevació a potències i l'extracció d'arrels, on també cal incloure la resolució d'equacions; i també poden ésser transcendents, com les exponencials, les logarítmiques i altres, innombrables, que proporciona el càlcul integral.

Aquestes definicions, com moltes altres que dóna en aquest capítol, són probablement el resultat d'una elaboració acurada i el més precisa possible del que EULER ha rebut i considera vigent en el seu temps, i l'origen se'n remunta probablement a LEIBNIZ.

En el capítol 4, EULER s'ocupa del desenvolupament de les funcions en sèries infinites de potències de la variable independent, i d'aquesta manera unifica el tractament de les funcions algèbriques i transcendents. En concret, afirma que qualsevol funció de z pot desenvolupar-se en sèrie infinita

$$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} + \ldots,$$

on els exponents α, β, γ, δ, ... poden ésser nombres qualsevols.

1.2.1. En el que resta d'aquesta primera part m'ocuparé exclusivament de la dissertació d'EULER titulada *De usu functionum discontinuarum in Analysi* Sobre l'ús de les funcions discontínues en l'Anàlisi), publicada en *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* **11** (1765), pp. 67-102, amb un resum a les pp. 5-7 (*Opera Omnia*, (1), 23, pp. 74-91, que és el text que citaré).

Aquest escrit d'EULER és l'obra d'un matemàtic madur, està acuradament redactat i conté una tesi ben definida i ben defensada: en l'anàlisi hom ha d'admetre les funcions discontínues, que són una generalització de les contínues, úniques admeses fins aleshores. EULER tingué la dissertació l'any 1765, o sigui dotze anys després del moment àlgid de la polèmica sobre l'equació d'ones entre D'ALEMBERT, EULER i DANIEL BERNOULLI; de fet EULER es refereix a la sentència expressada per D'ALEMBERT "poc després" (Cf. 1.2.2.) que EULER hagués publicat la seva solució el 1748 i el 1753. La tesi d'EULER en aquesta dissertació sembla que s'origina precisament a propòsit de la controvèrsia sobre l'equació d'ones, i hi està estretament vinculada.

La dissertació d'EULER es pot dividir en sis seccions, que passo a resumir.

En la primera (nn. 1-3) defineix molt succintament les funcions que ja havia definit prolixament en la *Introductio in Anal.*, com hem vist; però ara les anomena funcions *contínues*, i en la terminologia actual sembla que totes elles serien funcions analítiques (n. 1). Després explica en què consisteix la continuïtat (n. 2). Després defineix les funcions discontínues (n. 3).

Heus aquí alguns textos:

"1. Allò que en l'Anàlisi hom sol tractar sobre les funcions, o sigui quantitats determinades per una variable, es restringeix a aquelles funcions que en diem contínues i la formació de les quals es regeix per una llei determinada. Això s'il·lustra molt bé mitjançant la teoria de les línies corbes, on les ordenades en tant que són determinades per les abscisses, es comportem com funcions, de manera que l'índole de totes les funcions pot representar-se aptíssimament mitjançant línies corbes. (...) També, recíprocament, donada una línia corba qualsevol, les seves ordenades representen determinades funcions, la natura de les quals és continguda en la mateixa natura de la línia corba..."

"2. Ara bé, és ben sabut que la Geometria superior hom no sol considerar altres corbes que aquelles la natura de les quals és definida per una determinada relació entre les coordenades, expressada per alguna equació, de manera que tots els seus punts es determinen per una mateixa equació com a llei. Com que es creu que aquesta llei conté en ella el principi de continuïtat, puix per ella totes les parts de la corba estan lligades entre si per un vincle estretíssim de manera que en elles salvant el nexe de continuïtat no pot donar-se cap mutació, per aquesta raó aquestes línies corbes es diuen contínues; i no importa que l'equació que conté la seva natura sigui algèbrica o transcendent, coneguda o àdhuc desconeguda, però talment que entenguem que hi ha una equació que expressa la natura de tals línies corbes. Aquí no compta la continuïtat del traç al llarg del qual les rames de la corba es prolonguen; així les dues rames conjugades d'una hipèrbola constitueixen una línia corba contínua igual que una paràbola o el·lipse, malgrat que les dues rames estiguin completament separades. Precisament la causa per què hom atribueix continuïtat a les dues rames de la hipèrbola és que ambdues estan contingudes en una mateixa equació, a partir de la qual es poden construir".

Aquesta noció de continuïtat, que suposo que es remunta a LEIBNIZ, és vaga i té un caràcter global, i ara ens és estranya; aquest caràcter global s'assembla al que tenen les actuals funcions analítiques.

"3. Un cop establert el criteri de continuïtat és obvi quina cosa és una funció discontínua o mancant de llei de cointinuïtat. Així, aquelles línies corbes que no són determinades per cap equació, com les que solen dibuixar amb un traç lliure de la mà, procuren tals funcions discontínues, ja que en aquestes hom no pot definir mitjançant cap llei els valors de les ordenades pels de les abscisses. Tals línies corbes, en tant que contradiuen el superior gènere de continuïtat definit per llei, s'anomenen vulgarment mecàniques, però més pròpiament discontínues, o sigui manquen de llei de continuïtat, i això no perquè les seves parts no estiguin lligades entre si, sinó perquè no estan determinades per cap equació. Així, uns traços qualsevol dibuixats lliurement amb la mà sobre un paper, encara que prossegueixin amb continuïtat, segons aquesta definició han d'ésser considerats discontínus, ja que certament mai no correrà que tals traços estiguin continguts en una determinada equació. També és convenient incloure aquí les línies que hom anomena vulgarment mixtes, [obtingudes] quan s'uneixen parts preses de diferents línies corbes o també quan s'uneixen d'una altra manera les diverses parts d'una mateixa línia. Així, per exemple, el perímetre de un polígon...".

1.2.2. Fins aquí, en els tres primers números, EULER ha definit funció contínua, continuïtat i funció discontínua. En la segona secció (nn. 4-6) dóna la raó per la qual D'ALEMBERT rebutja les funcioins discontínues, que és també la raó per la qual rebutja la solució general de l'equació d'ones donada per EULER mitjançant les dues funcions arbitràries que determinen la posició i la velocitat inicial (4.). Naturalment, aquesta discrepància planteja una qüestió gravíssima sobre el contingut de l'Anàlisi i EULER enuncia la seva solució amb les raons dels nn. 5 i 6.

"4. Ara bé, és manifest que tals línies i funcions discontínues no troben lloc en l'Anàlisi, puix tota aquesta especulació s'ocupa d'investigar les propietats de les corbes que es consideren, la qual ocupació no pot assumir-se si hom no suposa que la natura d'aquestes línies és determina per alguna llei o equació. D'aquí que la major part dels geòmetres, tenint en compte aquesta raó, no hagin dubtat de proscriure enterament, tant de la Geometria com de tota l'Anàlisi, totes les línies i funcions discontínues, i de col·locar aquestes entre els objectes aliens a l'Anàlisi. No hi ha dubte que el Celeb. [èrrim] D'ALEMBERT ha defensat obertament aquesta sentència, quan jo havia determinat el moviment de les cordes vibrants de manera tan general que la solució s'adaptava a tots els moviments [velocitats] i figures [posició] que haguessin estat impresos a la corda en el moment inicial. Car, poc després, aquest baró excel·lentíssim m'objectà que no podia definir cap moviment si la figura impresa a la corda en el moment inicial no era contínua i continguda en una llei determinada, i que si al contrari, succeïa que la figura de la corda fos inicialment discontínua, llavors la determinació del moviment que havia de seguir-se de cap manera no pertanyia a l'Anàlisi, i per tant era il·lícit voler investigar-la. A tal objecció és cert que vaig respondre suficientment, i fa poc el Cel. [ebèrrim] LAGRANGE en les *Actes Taurinicenses* ha propugnat tan sòlidament la meva solució, que ja a ningú no li'n pot quedar dubte".

L'objecció de D'ALEMBERT recorda la que hom posà a la definició de funció donada per DIRICHLET el 1829. Aquest definí que una funció era una variable (dependent) que depenia d'una altra variable (independent), i que la dependència podia fixar-se d'una manera totalment arbitrària. Hom objectà que tal definició era inútil, puix que suposant tal arbitrarietat no podria dir-se res de les funcions. L'actitud de D'ALEMBERT d'aferrarse a un concepte restringit seria correcta si la introducció d'un concepte més general no quedés compensada, és a dir, si la generalització manqués d'aplicacions o d'interès. Per això ara la tasca d'EULERserà de mostrar que amb aquest nou concepte més general de funció troba efectivament aplicacions interessants.

EULER prossegueix.

"5. Aquí sorgeix, doncs, una qüestió molt important: ¿com al jutjar les funcions discontínues,..., i si hom els pot concedir un lloc en l'Anàlisi, i quin? EULER argüeix que en el problema de l'equació d'ones certament té sentit introduir les funcions discontínues; i que la solució del problema pertany a l'Anàlisi i a la ciència del moviment, tant si sabem resoldre'l com en el cas contrari. En tot cas el problema sempre és digne de la nostra atenció; ni aquí fa al cas, fins on arribi la nostra sagacitat, puix a penes hi haurà algun Geòmetra que no hagi treballat en problemes que superaven les seves forces". Ben entés que EULER reconeix que el problema de l'equació d'ones pertany a una part de l'Anàlisi que fins ara ha estat poc estudiada.

6. En ordre a resoldre aquest litigi observo que les funcions discontínues no poden ésser admeses ni en l'Àlgebra ni en aquella part de l'Anàlisi que encara ara hom tracta principalment. Però

l'Anàlisi és molt més extensa i hem de jutjar que inclou parts que, no sols no exclouen les funcions discontínues, sinó que fins a tal punt per llur mateixa natura les exigeixen, que cap problema que els pertanyi no es pot considerar degudament resolt si no s'introdueixen en la seva solució funcions completament arbitràries, i per tant també les discontínues. Cert que aquestes parts de l'Anàlisi encara ara són poc cultivades..."

En allò que resta de la seva dissertació, EULER justificarà l'existència de tals parts en l'Anàlisi i de com exigeixen en efecte un concepte més general de funció.

1.2.3. EULER dedica una tercera Secció de la dissertació (nn. 7-9) a la divisió de l'Anàlisi. La divideix partint del concepte de funció i per tant en dues parts: la que s'ocupa de funcions d'una variable independent i la que s'ocupa de funcions de dues o més variables independents.

En una quarta Secció (nn. 10-14) s'ocupa de la primera Part de l'Anàlisi, o sigui de les funcions d'una variable independent, i en primer lloc (nn. 10-12) extableix novament els fonaments del càlcul diferencial (Cf. al final de l'apartat 1.1.), "de manera que totes les controvèrsies, que en altre temps tingueren lloc sobre les diferencials de tots els ordre i sobre llur natura, espontàniament desapareixen". A continuació (nn. 13-14) defineix el Càlcul integral, que inclou la resolució d'equacions diferencials ordinàries, i posa de manifest que la integració completament satisfactòria d'una equació d'ordre n ha de contenir n constants arbitràries.

En la cinquena Secció s'ocupa de la segona Part de l'Anàlisi (nn. 15-19), o sigui de les funcions de dues o més variables independents. Mostra com la fonamentació dels conceptes de diferencial i derivada parcial es redueixen al cas d'una variable independent (nn. 15-16). A continuació s'ocupa del Càlcul Integral quan hi ha derivades parcials. Diu que difereix notablement del Càlcul Integral en el cas d'una sola variable independent, i que aquesta Part de l'Anàlisi ha estat encara poc estudiada, "fins a tal punt que a penes els seus primers elements han estat suficientment desenvolupats" (n. 17).

Heus aquí alguns textos d'EULER:

"18. El vigor i el quasi propi caràcter d'aquest nou Càlcul (Integral) ha estat fins ara molt poc considerat. Així com el vigor del Càlcul integral corrent consisteix en el fet que en qualsevol integració s'introdueix una quantitat constant a l'arbitri nostre; així en aquesta part que s'ocupa de les funcioins de dues variables, en cada integració entra en el Càlcul no sols una nova constant, sinó una nova funció d'una variable, funció completament indeterminada que de tal manera està al nostre arbitri, que en el seu lloc també les funcions discontínues poden ésser admeses. Per tant l'ús de les funcions discontínues, en aquest quasi nou gènere de càlcul, no sols no és exclòs, sinó que hem de jutjar que pertany quasi essencialment a la seva natura; i cap integració en aquest càlcul deu ésser considerada completa i perfecta si en [la solució de] l'equació integral no s'introdueix tal funció absolutament arbitrària." "I quan es tracta de funcions de tres variables, tota integració introdueix en el Càlcul una funció arbitrària de dues variables".

I aquestes afirmacions no són mera especulació o pedanteria, "sinó que més aviat tenen el seu màxim fonament en la natura de les coses i són bellíssimament coherents amb la concatenació de les veritats" (n. 19).

EULER no deixa de repetir, també aquí, que "un eximi exemple d'això es manifesta en el problema de les cordes vibrants".

1.2.4. Per si tot això no fos suficient, EULER, en una sisena i última Secció (nn. 20 fins a l'últim, 23), vol reforçar la seva tesi amb la resolució d'una equació no lineal en derivades parcials de primer ordre, "perquè no en quedi cap dubte" (n. 20).

En efecte, en aquesta sisena Secció EULER planteja i resol el problema de trobar totes les superfícies tals que les normals en tots els seus punts siguin iguals a una quantitat donada A.

Sigui z = z (x, y) una solució. És obvi que una solució molt particular és una esfera de radi a i centre en un punt qualsevol del pla de les variables x, y. Una altra solució més general és un cilindre de revolució de radi a i l'eix del qual sigui una línia recta que estigui continguda en el pla de les x, y. Però la solució més general serà, diu EULER, de manera intuïtiva, aquella superfície que hom obtingui traçant en el pla X, y "una corba qualsevol, sigui contínua o discontínua", (n. 20) i tal que les seves seccions per un pla ortogonal a la corba siguin semicercles de radi a amb el centre en la mateixa corba.

Després d'aquesta introducció intuïtiva (n. 20), EULER planteja l'equació general de tals superfícies, que és

$$z\,(1 + p^2 + q^2)^{1/2} = a \ ,$$

i la resol matemàticament amb un elegant mètode, i així demostra que la solució matemàtica coincideix amb la que intuïtivament havia previst.

L'important aquí és el següent: que suposar una corba arbitrària donada en el pla *x*, *y* és completament natural i absolutament necessari per a donar una solució general. EULER dóna, endemés, un mètode geomètric per a construir, partint de la corba donada, la superfície solució corresponent a aquesta corba donada, la qual òbviament pot ésser tant contínua com discontínua.

En realitat, quasi és una repetició del mateix argument ja donat a propòsit de l'equació d'ones. Aquí hi ha endemés una construcció geomètrica de la solució, i de tota manera reforça el seu argument general amb un altre exemple.

EULER fineix la seva dissertació repetint que les funcions discontínues en l'Anàlisi superior "de tal manera s'ha de considerar que pertanyen a l'essència del Càlcul, que cap integració no pot tenir-se per completa i acabada si al mateix temps no s'introdueix en el càlcul una funció màximament indefinida, i per tant també les discontínues" (23).

1.2.5. Termino amb unes consideracions que intenten resumir i aclarir la contribució d'EULER al concepte de funció.

L'única raó que dóna explícitament EULER és que les funcions discontínues són necessàries per a la resolució completa de les equacions en derivades parcials; i aporta com a exemple la mateixa equació d'ones en litigi i l'equació de les superfícies que tenen normal constant. És notable que aquesta raó té en compte exclusivament l'existència global de les funcions discontínues, i prescindeix de l'interès que podria oferir l'estudi de les mateixes funcions discontínues i de llurs propietats. L'interès d'EULER per les funcions discontínues no radica en l'interès d'elles per elles mateixes, sinó només en tant que són necessàries per a resoldre un altre problema. Encara hi ha més, car sembla que el mateix EULER, cedint a la crítica de D'ALEMBERT, les exclou de l'Anàlisi de les funcions d'una sola variable independent. La raó que té EULER per a aquesta exclusió és clara: no té una definició de continuïtat de la qual pugui partir. En efecte, en el n. 4, en un text que hem transcrit (Cf. 1.2.2.), diu: "la qual ocupació (investigar les propietats de les corbes) no pot assumir-se si hom no suposa que la natura d'aquestes línies és determinada per alguna llei o equació". És a dir, la continuïtat, o llei de continuïtat, és continguda en l'equació que defineix la funció "contínua"; si no hi ha equació, tampoc no hi ha manera de fer valer la continuïtat, ara en el sentit modern d'aquest terme. Una definició independent de continuïtat no serà donada fins el 1817 per B. BOLZANO i el 1821 per L. A. CAUCHY.

Malgrat les nombroses objeccions de D'ALEMBERT (Cf. LAGRANGE: *Oeuvres* (1867), I, pp. 158-180 i 319-331 de 1760-61), la raó d'EULER d'admetre les funcions discontínues em sembla vàlida, com ho confirma LAGRANGE en el text que acabem de citar. El rebuig de les funcions discontínues per part de D'ALEMBERT no em sembla justificat.

Actualment parlem de la classe C (D) de funcions contínues definides en D. Em sembla que CAUCHY és el primer a introduir la classe C (D), on les paraules funció i continuïtat tenen el sentit modern. Es pot dir que EULER sigui un precursor del concepte de C (D)? Es obvi que EULER suposa que les seves funcions discontínues són contíues en el sentit modern. Més: en sembla que suposa tàcitament que aquestes funcions discontínues tenen totes les derivades contínues que falta per tal que puguin ésser considerades solucions de les equacions en derivades parcials; i en aquest sentit LAGRANGE contesta una objecció de D'ALEMBERT. Malgrat això, em sembla que, a EULER, se li escapa aquesta temàtica de les classes C^n (D). Sembla que a EULER se li escapa que l'important per al concepte de funció no és l'equació que determina la correspondència entre les variable independent i dependent, sinó la correspondència en si; i que aquesta queda establerta quan es traça una corba en el pla, encara que no pugui expressar-se per una equació o "expressió analítica" en termes de certes limitades operacions admeses.

Mereix d'ésser observat finalment que aquesta generalització euleriana del concepte de funció tingué molta importància per al desenvolupament de l'Anàlisi Matemàtica. Les noves funcions discontínues, definitivament confirmades per LAGRANGE, plantejaren interessants i variats problemes nous de derivació, integració, desenvolupament en sèrie i d'altres.

2. En aquesta segona part exposaré breument els fonaments de la física i la relació d'aquesta amb les matemàtiques, segons es troben en els escrits d'EULER.

2.1.1. Podem distingir en EULER fonaments remots i pròxims de la física. Els primers tenen un marcat carèter filosòfic. En bona part són exposats per mateix EULER d'una manera força completa i sistemàtica a les *Lettres à une princesse d'Allemagne* (Cf. R. CALINGER: Euler's "Letters to a Princess in Germany" As an Expression of his Mature Scientific Outlook, *Arch. Hist. of Ex. Sc.* (1976) pp. 211-233). EULER fou un adversari declarat i bel·ligerant de la Monadologia de LEIBNIZ, potser àdhuc per raons religioses, puix no podia acceptar l'extremós racionalisme de LEIBNIZ. En conjunt en qüestions de filosofia natural estava més prop de DESCARTES i NEWTON que no de LEIBNIZ; però, també, manta vegada jutja críticament i contradiu tant DESCARTES com NEWTON.

Endemés de l'obra citada, EULER es manifestà sobre qüestions filosòfiques que guarden relació amb la física en nombroses publicacions. Menciono com a mostra les dues següents: *Enodatio quaestionis: Ultrum materiae facultas cogitandi tribui posset nec ne? Ex principiis mechanicis petita*, i a continuació *Recherces Physiques sur la Nature des moindres parties de la Matière.* (*Opuscula*, pp. 277-300), que he pogut llegir en el text original (Biblioteca Nacional, Madrid). Aquestes contribucions, que pertanyen més a la filosofia i que no guarden una relació necessària amb el contingut propi de la física, son d'interès secundari dins l'obra d'EULER. Potser perquè ell mateix ni era ni es considerava un metafísic i preferia la ciència.

2.1.2. Dins la física, EULER s'ocupà especialment de qüestions de Mecànica Clàssica, en la construcció de la qual ningú no ha contribuït tant com ell. S'ocupà també d'Astronomia i Òptica; d'Elasticitat, i és el primer d'escriure'n un text; d'Hidrodinàmica i les aplicacions a la Ciència Naval; i encara d'algunes altres parts de la física.

Aquí em limitaré (no hi ha temps per a més) a una enumeració dels primers principis i equacions que EULER per primera vegada formula en el camp de la Mecànica Clàssica, i que constitueixen els fonaments parcials de respectives teories desenvolupades ulteriorment.

a) Mencionem en primer lloc les equacions de la Mecànica d'un nombre finit de punts materials, actualment denominades Equacions de NEWTON, però la formulació de les quals com a sistema d'equacions diferencials és deguda a EULER, que les publicà per primera vegada el 1747 (Cf. Truesdell, 1975).

b) Posa els fonaments de la Mecànica del cos rígid i els desenrotlla profundament i extensa. Amb motiu d'aquest estudi descobreix f el principi del moment de la quantitat de moviment i més tard és el primer a formular-lo, el 1775 (Cf. TRUESDELL, 1975, bé que aquest principi té un precedent important en el teorema de la constància de la velocitat areolar dels planetes degut a KEPLER i NEWTON.

c) Hom deu també a EULER la formulació actual del principi de D'ALEMBERT, que afirma l'equilibri de totes les forces aplicades a un sistema de sòlids amb lligaments quan hom hi inclou les forces d'inèrcia canviades de signe. Aquest principi ja havia estat formulat d'una manera equivalent per D'ALEMBERT en son *Traité de Dynamique* (1743), encara que en termes de moviments i de forma obscura, i sense mencionar explícitament les "forces d'inèrcia".

d) EULER també és un important iniciador de la Teoria d'equacions diferencials ordinàries, i encara més de la Teoria d'equacions en derivades parcials de primer ordre, i d'ordre superior. Ja hem mencionat la seva contribució de caràcter fonamental a la resolució en forma general de l'equació d'ones.

e) Si EULER no és el creador del Principi de la mínima acció de Maupertius, i consti que hi ha historiadors que creuen que sí que ho és, n'és certament un precursor important. Mitjançant una forma d'aquest principi Euler escriu el primer tractat d'Elasticitat, sobre l'elàstica de la biga, en el *Aditamentum I* al *Methodus Inveniendi Lineas Curvas* (1744); i en el *Aditamentum II* de la mateixa obra de mostra l'equivalència, en el cas de projectils, d'un mètode directe amb el de l'aplicació d'un principi de mínim. Per a EULER el mètode directe és vinculat a les causes eficients, mentre que els principis de mínim ho estan a les causes finals, la investigació de les quals no és cosa seva, sinó que ho deixa als metafísics.

2.1.3. EULER era primàriament un analista. Tenia una capacitat extraordinària per a adonar-se d'allò que era nou i fonamental en els problemes que es presentaven; i sabia isolar-ho i sistematitzar-ho i exposar-ho d'una manera aparentment fàcil. Tot això gràcies al seu increïble domini de les tècnices de l'Anàlisi matemàtica. D'aquí que fos capaç de trobar els primers principis i les primeres equacions de mantes teories actuals de la matemàtica i de la física.

2.2 El segle d'EULER ha estat qualificat com l'època heroica de les matemàtiques pels avanços immensos i profunds en moltes àrees, incloent-hi especialment la física-matemàtica, i també per la manca de rigor o de por amb què s'han acomplert aquestes conquestes.

Aquesta heroïcitat depèn en gran manera de les relacions que en aqwuesta època es donen entre les matemàtiques i la física.

Sembla, en efecte, que la dependència mútua de les matemàtiques i la física mai ha estat tan estreta i múltiple com en el segle XVIII. Endemés, EULER tipifica molt exemplarment tota aquesta temàtica.

2.2.1. Comparant les matemàtiques del XVIII amb les del període grec, xoca de seguida la falta de rigor. Aquesta fallada és pròpia també de les matemàtiques del XVII i no hi ha dubte que els creadors del càlcul infinitesimal, NEWTON i LEIBNIZ, així com EULER i tots el grans matemàtics de l'època, en són molt conscients. Ja BERKELEY ho havia remarcat. En el segle XVIII hom arriba i tot a ridiculitzar el rigor dels grecs. Les raons que els matemàtics donen per a justificar aquesta manca de rigor són diverses (cf. per exemple els nombrosos textos que cita M. KLINE: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, 1972, especialment el cap. 26).

La realitat és que els problemes que es proposen i sorgeixen resulten per ells més interesants que no els que planteja la falta de rigor; que no hi ha temps per a ocupar-se de temes que semblen minuciositats, si no escrúpols; i, sobretot, que l'èxit estrepitós i manta vegada sorprenent actua com a suficient justificació del càlcul. Especialment en EULER, l'èxit meravellós del càlcul, a pesar, per exemple, del despreocupat maneig de les sèries, exerceix un embruix que supera tot dubte.

Així, a propòsit de la manca de rigor en la justificació de l'Àlgebra dels nombres negatius, D'ALEMBERT, que n'és conscient, escriu: "Les regles algèbriques d'operacions amb els nombres negatius són generalment admeses per tothom i reconegudes com a exactes, qualsevol que sigui la idea que nosaltres poguem tenir d'aquestes quantitats" (Cf. M. KLINE, o.c. p. 157); el mateix autor recomana als matemàtics joves que no es preocupin, que facin matemàtiques i que la fe ja els vindrà.

L'operativitat sembla erigir-se en principi epistemològic amb cert menyspreu o devaluació de la lògica. En podríem donar alguns exemples, però valgui com a mostra la insuficiència, malgrat el progrés de les successives formulacions, de les quatre cites fetes en l'apartat 1.1. a propòsit del concepte de derivada, i bastants paràgrafs, de l'apartat 1.2.

És evident que l'explicació i la comprovació empírica dels fenòmens de la Mecànica i de la Física en general, que els matemàtics del XVIII acompleixen mitjançant l'Anàlisi matemàtica, té un paper important en la justificació i la confírmació de l'embruix que el càlcul exerceix. Per a DESCARTES l'Àlgebra, que en el segle XVIII correntment incloïa també els càlculs de l'Anàlisi, era encara només una tècnica al servei de la geometria, i en aquest sentit fou emprada pel creador de la Geometria analítica. En canvi, EULER mantes vegades afirma la superioritat de l'Anàlisi sobre la Geometria, en el sentit que ofereix tècniques i mètodes més potents per a resoldre problemes (cf. *Introd. in Anal. Inf.* (1748), p. XII, i *De Usu Funct. Disc.* en *Opera Omnia,* (1), 23, pp. 80-81).

2.2.2. Comparant el segle XVIII amb els següents en allò que pertoca a les relacions entre matemàtiques i físiques, el fet més notable és la progresiva independització de les matemàtiques respecte a la física.

En primer lloc és clar que els problemes de la física són una important motivació per al desenvolupament de les tècniques, dels mètodes i de les teories de les matemàtiques. Aquesta motivació és perenne i la trobem en els grecs i en els matemàtics actuals. Però em sembla que en el segle XVIII i concretament en EULER, i ja a partir de NEWTON, té un relleu especial. Els innombrables problemes físics que es plantegen són els que fan créixer l'Anàlisi; només cal pensar en el càlcul diferencial, el càlcul integral, les equacions diferencials, tant ordinàries com en derivades parciales, el càlcul de variacions, etc.

Però, des dels grecs fins al segle XVIII inclusivament la relació entre la física i les matemàtiques és molt més estreta que no pas la que existeix actualment, sobretot perquè les matemàtiques només es conceben verificades en la realitat, o sigui en la física. La geometria dels grecs i evidentment la de DESCARTES, i la d'EULER, és una geometria física, amb el mateix sentit que avui parlem de física-matemàtica. En termes lògics actuals, les matemàtiques del XVIII tenen un model en la física, i conseqüentment aquesta assegura la consistència de les matemàtiques.

Actualment distingim entre una geometria física i una geometria matemàtica, la qual es desenrotlla independentment de la física. I tenim unes matemàtiques, que en diem pures, o, millor, fonamentals, que s'han independitzat totalment, des d'un punt de vista lògic, de la física. Aquest procés d'independització s'acompleix durant el segle XVIII i sobretot durant el segle XIX. Fou un procés llarg i laboriós i els factors més importants que hi contribuïren foren la comprensió dels nombres negatius i imaginaris ("impossibles" segons EULER), d'una manera especial el descobriment de les geometries no euclidianes, la introducció dels espais n-dimensionals, també molt especialment el desenvolupament de l'Anàlisi, i els processos de progressiva abstracció i generalització. Quan a finals del XIX sorgeixen dins les matemàtiques, ja independitzades de la física, les primeres paradoxes, queda plantejat el problema de la consistència de les matemàtiques.

BIBLIOGRAFIA

CALINGER, R.: *Euler's "Letters to a Princess of Germany" As an Expression of his Mature Scientific Outlook,* Arch. Hist. of Ex. Sc. (1976) 211-233.

ENESTRÖM, G.: *Verzeichnis der Schiriften Leonhard Euler.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, **4** (1910-1913).

EULER, L.: *Opera Omnia.* Acadèmia de Ciències de Suïssa. Des del 1911. Comprèn quatre sèries amb un total de 82 volums. Continua la publicació dels volums de la quarta sèrie.

EULER, L.: *Methodus invenindi lineas curvas maximi minimive propietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetricilatissimo sensu accepti.* Lausana i Ginebra, 1744.

EULER, L.: *Introductio in Analysin infinitorum.* En Opera Omnia (1), 8 i 9.

EULER, L.: *Institutiones calculi differentialis.* En Opera Omnia (1). 10.

EULER, L.: *Institutiones calculi integralis.* En Opera Omnia (1), 11-13.

EULER, L.: *Vollständige Anleitung zur Algebra.* En Opera Omnia (1), 1.

EULER, L.: *De usu functionum discontinuarum in Analysi.* En Opera Omnia (1), 23, pp. 74-91.

EULER, L.: *Lettres à une princesse d'Allemagne.* En Opera Omnia (3), 11 i 12.

EULER, L.: *Enodatio quaestionis utrum materiae facultas cogitandi tribui posset nec ne? Ex principiis mechanicis petita.* En Opuscula. Berlín, 1746-51. Pp. 277-286.

EULER, L.: *Recherches Physiques sur la Nature des moindres parties de la Matière.* En Opuscula. Berlín, 1746-51. Pp. 287-300.

KLINE, M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Nova York, 1972.

LAGRANGE, J.L.: Oeuvres, J.A. Serret ed., 14 volums. París, 1867-1892. Interessen els volums 11-14.

TRUESDELL, C.: *Ensayos de Historia de la Mecánica.* Madrid, 1975. Traduït de l'anglés (Nova York, 1968) per J.C. Navascués Howard i E. Tierno Pérez-Relaño.